Technikerschule (Vorkurs) Mathematik

Lehrer: Fr. Ullrich (g.ullrich@gmx.ch)

Mitschrift von Marc Landolt (marc.landolt@yetnet.ch)

1 Algebra

1.1 Arabische Ziffern

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

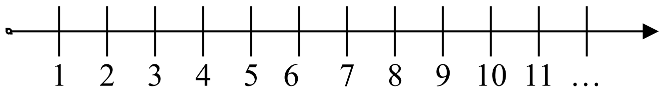
1.2 Kardinalzahlen

12, 27, 364, 50...

1.3 Ordinalzahlen

3. 5. 7.

1.4 Zahlenstrahl



1.5 Variabeln

1.5.1 Formvariabeln a,b,c

Die Formvariabeln müssen beim Addieren gleich sein.

1.5.2 Variable x, y, z

1.5.3 Winkel α, β, γ

1.6 Zahlenbereiche

1.6.1 Die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$N = \{1,2,3,4,5,...\}$	**Natürliche Zahlen**
$N_0 = \{0,1,2,3,4,5,...\} = N \cup \{0\}$	**inklusive 0**

Addition: gegenüber der Addition abgeschlossen
Subtraktion: nicht abgeschlossen, es fehlen die negativen Zahlen

1.6.2 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	Ganze Zahlen

Addition: abgeschlossen
Subtraktion: abgeschlossen
Multiplikation: abgeschlossen
Division: nicht abgeschlossen, es fehlen Werte

Es gelten folgende Axiome

1.	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativgesetz der Addtion
2.	$(a+b) = (b+a)$	Kommutativgesetz der Addition
3.	$a+0 = a = 0+a$	Existenz eines neutralen Elementes für die Addition
4.	$\forall a \in Z\ \exists \widetilde{a}\ mit\ a + \widetilde{a} = 0$	Existenz eines inversen Elementes bezüglich der Addition
5.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
6.	$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
7.	$1 \cdot a = a = a \cdot 1$	Existenz eines neutralen Elementes 1 für die Multiplikation
8.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributivgesetz

1.6.3 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \right\}$$

Es gelten folgende Axiome

1.	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativgesetz der Addtion
2.	$(a+b) = (b+a)$	Kommutativgesetz der Addition
3.	$a+0 = a = 0+a$	Existenz eines neutralen Elementes für die Addition
4.	$\forall a \in Z\ \exists \widetilde{a}\ mit\ a + \widetilde{a} = 0$	Existenz eines inversen Elementes bezüglich der Addition
5.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
6.	$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
7.	$1 \cdot a = a = a \cdot 1$	Existenz eines neutralen Elementes 1 für die Multiplikation
8.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributivgesetz
9.	$\forall a \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0\ \exists! \widetilde{a}$ mit $\widetilde{a} \cdot a = 1$	Existenz eines inversen Elements für die Multiplikation

Addition: abgeschlossen
Subtraktion: abgeschlossen
Multiplikation: abgeschlossen
Division: ausser durch 0 sind alle durchführbar
Wurzelziehen: nicht abgeschlossen, es fehlen bereiche auf dem Zahlenstrahl

Es fehlen die irrationalen Zahlen den $d^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar, anders gesagt $\sqrt{2}$ ist auf dem Zahlenstrahl zwischen zwei rationalen Zahlen:

1. x sei eine gekürzte rationale Zahl, also $x = \frac{p}{q}$ mit $ggT(p,q) = 1$
2. $x^2 = 2$ daraus folgt $\frac{p^2}{q^2} = 2$
3. formt man den Term nach p^2 um erhält man $p^2 = 2q^2$ was bedeutet p^2 ist gerade
4. ist p^2 gerade ist auch p gerade
5. daraus folgt, es gibt eine Zahl, $m \in Z$ mit $p=2m$ rechnen wir zurück gibt das für $p^2=4m^2$
6. setzen wir nun die beiden Gleichungen $p^2 = 2q^2$ und $p^2=4m^2$ gleich erhalten wir für $q^2=2m^2$ womit q^2 und somit auch q eine gerade Zahl sein muss
7. somit sind p und q beide durch 2 teilbar, dies steht aber in Wiederspruch zu Punkt 1, denn p und q müssten mit *ggT(p,q)* ja eigentlich teilerfremd sein.

→ Somit gibt es einen weiteren Zahlenbereich dem Zahlenstrahl, der durch die rationalen Zahlen nicht dargestellt werden kann, wir ergänzen den Zahlenstrahl mit den irrationalen Zahlen und bekommen eine neue Menge: die reellen Zahlen

1.6.4 Die reellen Zahlen R

Die reellen Zahlen können im Rechner nicht exakt dargestellt werden, sie werden mit Rekursionsgleichungen durch rationale Zahlen (beliebig gut) approximiert:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

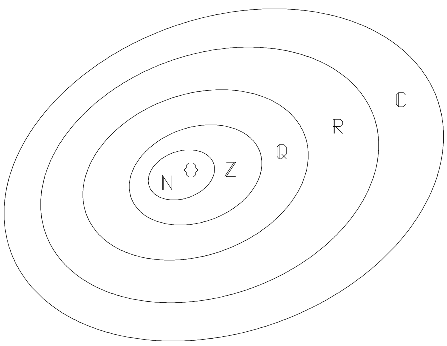
$x_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$(x_2)^2 \approx 2{,}25$
$x_3 = \frac{17}{12} = 1{,}4166...$	$(x_3)^2 \approx 2{,}00694...$
$x_4 = \frac{577}{408} = 1{,}414215...$	$(x_4)^2 \approx 2{,}0000060...$
$x_5 = \frac{665857}{470832} = 1{,}41421356...$	$(x_5)^2 \approx 2{,}000000000...$
$x_6 = ...$	

Addition: abgeschlossen
Subtraktion: abgeschlossen
Multiplikation: abgeschlossen
Division: ausser durch 0 sind alle durchführbar.
Radizieren: ausser durch negative Zahlen sind alle durchführbar, für die Wurzel einer negativen Zahl müssen wir auf die komplexen Zahlen zurückgreifen

1.6.5 Die komplexen Zahlen ℂ

1.7 Zahlenmengen

$\{\ \} \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



1.8 Rechnen mit Termen

1.8.1 Addition

$\overbrace{4+7}^{Summe} = \overbrace{11}^{Summe}$

Summand

Es gilt, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Neutrales Element

1.8.2 Subtraktion

Kommutativ- und Assoziativgesetz gilt nicht
0 ist neutrales Element

$\overbrace{4-7}^{Differenz} = \overbrace{11}^{Differenz}$

Subtrahend
Minuend

1.8.2.1 Günstiges Rechnen

50c-16c-32c-18c+27c

=50c+27	-16c	-32c-18c
=77c	-16c	-50c
=77c	-66c	
=11c		

1.8.2.2 Klammern

Klammern regeln die Vorfahrt
5-(+2)=5-2=3

-Bei positiven Klammern bleiben die Rechen- und Vorzeichen unverändert

85+(15+70)=(85+15)+70

-Bei negativen Klammern ändern sich bei allen Gliedern die Vorzeichen

a-(b-c)=a-b+c
a-(b+c)=a-b-c

1.8.2.3 Rechnen mit verschachtelten Klammern

Von innen nach aussen

a-{b-(c+d)-[a+(b-c)]}
a-{b-c-d-[a+b-c]}
a-{b-c-d-a-b+c}
a-b+c+d+a+b-c
2a+d

1.8.3 Multiplikation

$$\underbrace{4+4+4+4+4}_{5\cdot 4=20}$$

$$\overbrace{a \cdot b}^{Produkt} = \overbrace{c}^{Produkt}$$

Faktoren
Multiplikand
Multiplikator

$a \cdot b = ab$
$2 \cdot 3!$
$3 \cdot a = 3a$
$3 \cdot (a+b) = 3(a+b)$

Es gilt: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Neutrales Element

1.8.3.1 Das Vorzeichen

$(+3)\cdot(+4) = 3\cdot 4 = 12$
$(+3)\cdot(-4) = 3\cdot(-4) = 12$
$(-3)\cdot(+4) = (-3)\cdot 4 = 12$
$(-3)\cdot(-4) = +12 = 12$

$negativ \cdot negativ = positiv$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\cdot(-3) = -9 \\ 2\cdot(-3) = -6 \\ 1\cdot(-3) = -3 \\ 0\cdot(-3) = 0 \\ -1\cdot(-3) = 3 \\ -2\cdot(-3) = 6 \end{array}\right.$$

1.8.4 Die zuletzt durchgeführte Operation bestimmt die Art der Aufgabe

1) mn + uv Addition
2) m·(uv) Multiplikation
3) m· u + v Addition

1.9 Multiplikation von Summen (Trimone)

$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

die umgekehrte Richtung ist meist komplizierter

$x^2 + 9x + 20$ $(x + 4)(x + 5)$

Vorgehen:

$(x + a)\ (x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + x(a+b) + ab$

$x^2 + \mathbf{9}x + 20$

$1 \cdot 20 \rightarrow$ Summe $(a+b) = 21$
$2 \cdot 10 \rightarrow$ Summe $(a+b) = 12$
$4 \cdot \ \ 5 \rightarrow$ Summe $(a+b) = \mathbf{9}$

Am schnellsten findet man die alle möglichen Kombinationen von Faktoren durch Primfaktorzerlegung

$210 / 2 = 105$
$105 / 5 = 21$
$21 / 7 = 3$
3

Somit kommen die Primfaktoren 2, 3, 5, 7 vor und damit lassen sich folgende Faktoren erstellen:

$T_{210} = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

Summen als Faktoren

$(a+b)(c+1) \quad = \quad ac + a + bc + b$

und auch umgekehrt

$ac + a + b + bc=$
$a(c+1)+b(c+1)=$
$(a+b)\ (c+1)$

1.10 Division

1595 : 319 =
1595 - 319 - 319 -319 …

$$\overbrace{a : b}^{Quotient} = \frac{a}{b}$$

Zähler

Nenner

Divisor

Dividend

Wichtig:

Die Division durch 0 ist nicht erlaubt (definiert)

$\frac{a}{b}\; a,b \in Q; b \neq 0 \quad oder \quad b \notin \{0\}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	Stambrüche
$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{9}$	echte Brüche
$1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}$	gemischte Zahlen
$\frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{7}{1}$	Scheinbrüche

1.10.1 Teilbarkeitzregeln

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar sind.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar sind.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine null oder eine 5 ist.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist. (Dreierprobe)

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist und die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist. (Neuenrprobe)

Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Man addiert die Ziffern der Zahl von links nach rechts mit
wechselndem Vorzeichen, beginnend mit +, falls die Zahl eine
ungerade Anzahl von Ziffern hat, andernfalls mit als alternierende Quersumme.
Ist das Ergebnis größer als 10, so bilde man erneut den Elferrest.
78 612 hat man 7 - 8 + 6 - 1 + 2 = 6

1.11 Primzahl

Def.: Eine Zahl die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist nennt man Primzahl. Die Zahl 1 ist keine Primzahl.

Die Primzahlen kommen weiter oben weniger vor.

1.11.1 Das Sieb des Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

Man geht beginnend bei 2 und streicht der reihe nach alle vielfache der aktuellen Zahl bis man am Ende des Siebes angelangt ist.

1.12 Primfaktorzerlegung

24 → $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
63 → $3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$
124 → $2 \cdot 2 \cdot 31 = 2^2 \cdot 31$

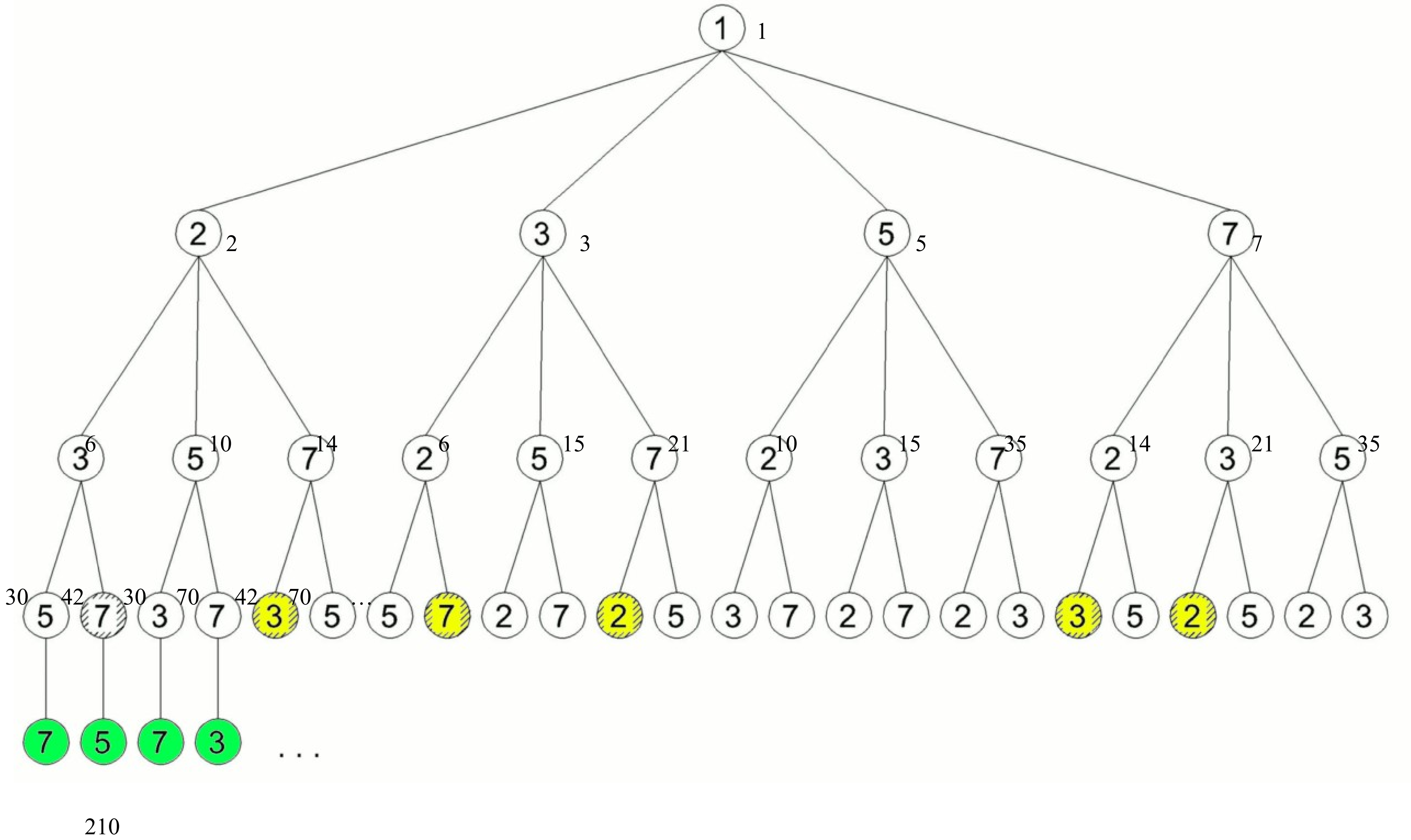
$T_{124} = \{2, 4, 31, 62, 124\}$

1.12.1 Finden der Teiler (T_x)

Bei der Primfaktoren ist es noch relativ leicht, man findet bei 124 leicht alle Teiler:
$T_{124} = \{2, 4, 31, 62, 124\}$

Bei vier wird es bereits komplizierter, aber durch Kombination aller Primfaktoren erhält man die möglichen Teiler, bei vielen Primfaktoren wird das ganze unübersichtlich und es empfiehlt sich die Primfaktoren als Baum (siehe nächste Seite) darzustellen. So lassen sich der Reihe nach alle Produkte bilden. So finden wir alle Lösungen und zweitens sehen alle doppelten Lösungen:

z.B. alle schraffierten sind 42
alle grünen sind 210 und somit die ursprüngliche Zahl (Somit kann man die unterste Zeile im Prinzip auch streichen)



1 1
2 2
3 3
5 5
7 7
3 6
5 10
7 14
2 6
5 15
7 21
2 10
3 15
7 35
2 14
3 21
5 35
30 5
42 7
30 3
70 7
42 3
70 5
...
5 7 2 7 2 5 3 7 2 7 2 3 3 5 2 5 2 3
7 5 7 3
. . .
210

1.13 Grösster gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Unter dem grössten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen verstehen wir die grösste Zahl, durch welche man beide ohne Rest teilen kann.

Zuerst werden beide Zahlen in Primfaktoren zerlegt, danach nimmt man die Primfaktoren die in beiden Zahlen vorkommen nach unten. Kommen Primfaktoren in beiden Zahlen mehrmals vor dürfen sie mehrmals nach unten genommen werden, jedoch nur so oft, wie sie in der Zahl mit weniger dieser Primfaktoren vorkommt

ggT(84,56)

```
84 =    2 2      3        7
56 =    2 2 2             7
-----------------------------
        2 2               7        = 2*2*7 = 28
```

ggT(84,56)=28

Weiterführende Literatur: der ggT lässt sich auch mit Hilfe des (modernen) Euklidschen Algorithmus berechnen, dies kommt vor allem dann zu Zuge, wenn man den ggT mit Hilfe eines Computers berechnen will.

1.14 Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Unter dem kleinsten gemeinsamen vielfachen zweier Zahlen verstehen wir die Zahl die sich durch beide anderen ohne Rest teilen lässt

Zuerst werden beide Zahlen wieder in Primfaktoren zerlegt, danach nimmt man von beiden Zahlen von jedem Primfaktor so viele, wie es in der mit mehr dieser Sorte hat. Also jeden Primfaktor in der höchst vorkommenden Potenz.

kgV(42,56)

```
42 =    2        3        7
56 =    2 2 2             7
-----------------------------
        2 2 2    3        7        =  2*2*2*3*7 = 168
```

kgV(42, 56) = 168

1.15 Beziehung zwischen kgV und ggT

kgV(a,b) und ggT(a,b) stehen in folgender Beziehung:

$kgV(a,b) \cdot ggT(a,b) = a \cdot b$

somit liesse sich der kgV(a,b) auch folgendermassen berechen: $kgV(a,b) = \frac{a \cdot b}{ggT(a,b)}$

1.16 Anwendung von kgV und ggT

1.16.1 kgV(a,b)

Der kgV(a,b) wird zum gleichnamig machen von Brüchen gebraucht:

Das kgV($Nenner_1$,$Nenner_2$) entspricht dem Hauptenenner der beiden Brüche haben die beiden Brüche danach den selben Nenner also den Hauptnenner dürfen sie von einander addiert und subtrahiert werden.

$$\underbrace{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}}_{kgV(2 \cdot 3)=6} \rightarrow \frac{3 \cdot 1}{6} \pm \frac{2 \cdot 1}{6} = \underbrace{\frac{5}{6}}_{+} \Big/ \underbrace{\frac{1}{6}}_{-}$$

1.16.2 ggT(a,b)

Das ggT(Zähler,Nenner) wird zum kürzen von Brüchen gebraucht, man kann Zähler und Nenner jeweils durch den ggT der beiden teilen und erhält so einen gekürzten Burch

$$\frac{26}{39} \Rightarrow ggT(26,39) = 13 \Rightarrow \frac{26:13}{39:13} = \frac{2}{3}$$

1.17 Rechnen mit Brüchen

Addition und Subtraktion wurde somit behandelt wie auch das Kürzen von Brüchen

Somit bleibt noch die Multiplikation und die Division von Brüchen

1.17.1 Multiplikation

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, in dem man ihre Zähler mit einander Multipliziert und ihre Nenner miteinander Multipliziert.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Bsp: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

1.17.2 Division

Zwei Brüche werden dividiert, in dem man die erste mit dem Kehrwert der zweiten multipliziert bzw. jeweils den Zähler der ersten mit dem Nenner der Zweiten und umgekehrt multipliziert.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Bsp: $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

1.17.3 Kürzen von Summen

Spruch: Aus den Summen kürzen die Dummen

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{\cancel{a}b + ac}{\cancel{a}} = \frac{b + ac}{1}$$ dies ist komplett FALSCH.

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = \frac{\cancel{a}(b + c)}{\cancel{a}} = b + c$$ dies ist RICHTIG

Geometrie

1.18 Grundlegende Begriffe

1) Punkte · x A, B, C	A_{bel}	beliebiger Punkt A
2) Strecken	a, b, c	Strecken a, b, c
2 3) Strecken nach B	$\overline{AB}$	**Strecke von A**
4) $\lvert a \rvert$	$\lvert\overline{AB}\rvert = \lvert a \rvert$	Länge der Strecke $\overline{AB}$ bzw. a, z.B. $\lvert a \rvert$ =4cm
5) g Gerade	g	Gerade
6) AB	AB	Gerade durch die Punkte A und B
7) $\vdash\overline{AB}$	$\vdash\overline{AB}$	Strahl (Halbgerade) von A aus
8) $A \in g$		A ist Punkt auf der Geraden G
9) $g \cap h = S$		Die Geraden g und h schneiden sich in S
10) $g \parallel h$		g ist parallel zu h
11) $\overline{AB} > \overline{CD}$		$\overline{AB}$ ist grösser als $\overline{CD}$
12) $\angle\alpha$		Winkel α
13) $\angle CAB$		Winkel durch C, A, B
14) $\angle(b;c)$		Winkel zwischen b und c
15) f.s.v. α		Freier Schenkel von α
16) $\overset{\frown}{AB}$		Bogen von A nach B
17) R, ⦜		Rechter Winkel, 90° Winkel
18) ⊙ (M, r= $\overline{AB}$)		Kreis um M mit Radius $\overline{AB}$
19) $\angle\alpha$ in A → g		Gerade von Punkt A aus mit Winkel α

Das griechische Alphabet:

αΑ	βΒ	γΓ	δΔ	εΕ	ζΖ	ηΗ	ϑΘ	ιΙ	κΚ	λΛ	μΜ	νΝ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My	Ny
ξΞ	οΟ	πΠ	ρΡ	σΣ	τΤ	υΥ	φΦ	χΧ	ψΨ	ωΩ		
Xi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega		

2.1 Winkel

Grundkonstruktion

Übertragen eines Winkels CAB

1. g von A
2. ⊙ (A', r= $\overline{AB}$)=K
3. g∩⊙ K=B'
4. ⊙ (B, r= $\overline{BC}$)∩=C'
5. h: A'C' $=\angle\alpha$

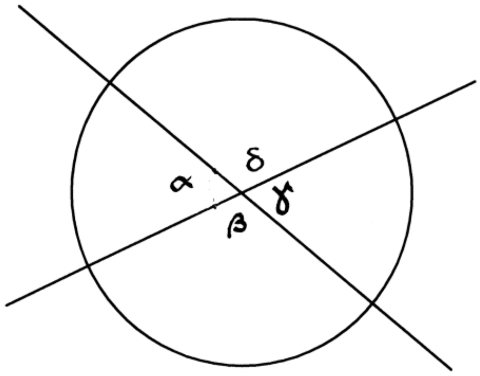
2.1.1 Verschiedene Winkel

Spitzer Winkel	0°<α<90°
Rechter Winkel	α=90°
Stumpfer Winkel	180°<α<90°
Gestreckter Winkel	α=180°
Überstumpfer Winkel	180°<α<360°
Vollwinkel	α=360°

Positiver Drehwinkel ist gegen den Urzeigersinn.

Erhebungswinkel = Winkel beim Beobachter der z.B. auf einen Turm hinauf blickt
Tiefenwinkel = Winkel beim Beobachter, der z.B. von einem Ballon herunter blickt
Sehwinkel = Winkel beim Beobachter in der Ebene.

Winkel an zwei sich schneidenden Geraden



4 Winkel α, β, γ, δ

Definition Nebenwinkel

Sie haben einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam. Die freien Schenkel bilden eine Gerade.

Du Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180° = 2R
Sind Nebenwinkel einander gleich so ist jeder 90°
α und β   β und γ   γ und δ   δ und α

Definition Scheitelwinkel

Sie haben den Scheitelpunkt gemeinsam. Die Schenkel bilden paarweise eine Gerade.

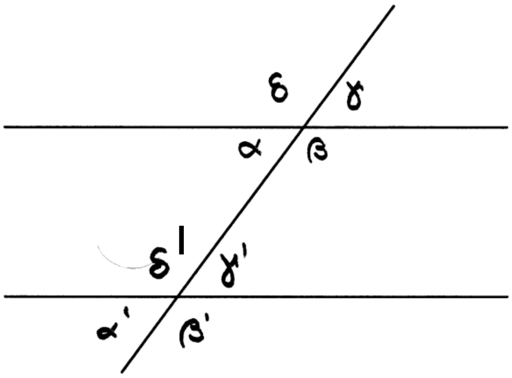
α und γ   β und δ

Scheitelwinkel sind einander gleich

Komplementwinkel sind Winkel die zusammen 90° ergeben

Supplementwinkel sind Winkel die zusammen 180° ergeben

2.1.2 Winkel an geschnittene Parallelen



Stufenwinkel

Sind gleich liegende und gleich grosse Winkel:

α und α' β und β' γ und γ' δ und δ'

Wechselwinkel

Sind gleich gross

α und γ' β und δ' γ und α' δ und β'

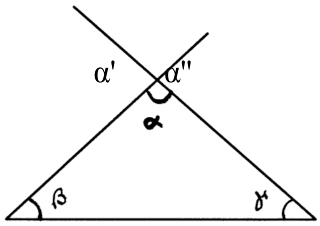
Entgegengesetzte Winkel = Gegenwinkel (Frommenweiler)

Sind zusammen 180°

α und δ' β und γ' γ und β' δ und α'

2.1.3 Winkel am Dreieck

Allgemeines Dreieck

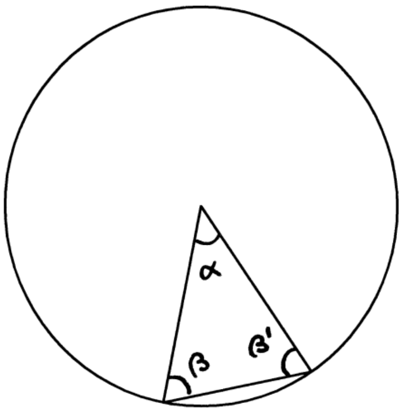


$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\beta + \gamma = \alpha' = \alpha''$

Die Summe aller Innenwinkel beträgt 180°
Die Summe aller Aussenwinkel beträgt 380°

Gleichschenkliges Dreieck



$\alpha + \beta + \beta' = 180°$

$\beta = \beta' = \dfrac{180° - \alpha}{2}$

2.2 Seiten und Winkel im Dreieck

- a+b > c

Satz: Die Summe zweier Seiten ist immer grösser als die Gegenüberliegende Seite

Satz: In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Satz: Der grösste Winkel liegt gegenüber der längsten Seite

- **Gleichheit – Ähnlichkeit – Kongruenz (Flächengleichheit)**

Zwei Flächen heissen kongruent (Flächengleich) wenn sie in der Grösse und Form übereinstimmen.

Bei ähnlichen Dreiecken stimmt nur die Form überein z.B. alle die Winkel gleich sind.

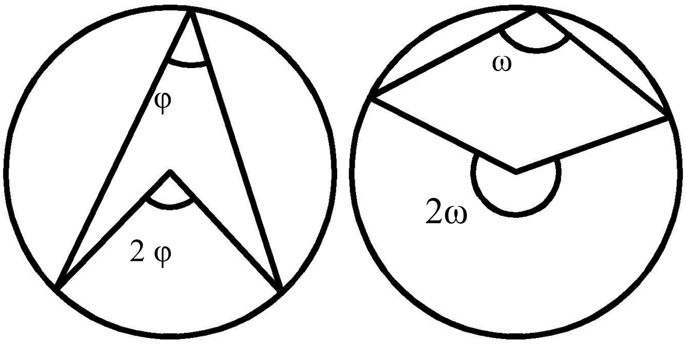
2.2.1 Die vier Kongurenzsätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

- Zwei Winkel der Dreiecke stimmen überein
- Das Verhältnis zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels stimmen überein
- Das Verhältnis zweier Seiten und der Winkel gegenüber der längeren Seite stimmt überein
- Das Verhältnis aller Seiten stimmt überein

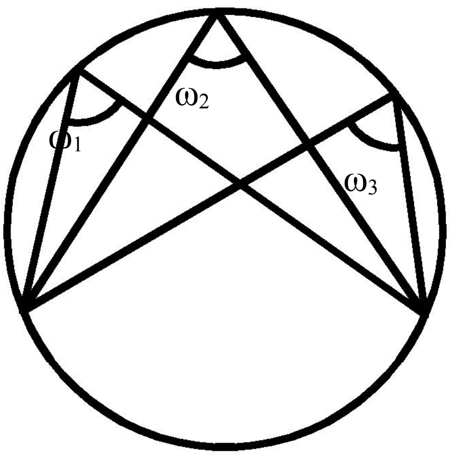
2.2.2 Winkel am Kreis

Zentriwinkel und Periferiewinkel



Ein Peripheriewinkel ist hab so gross wie der zugehörige Zentriwinkel.

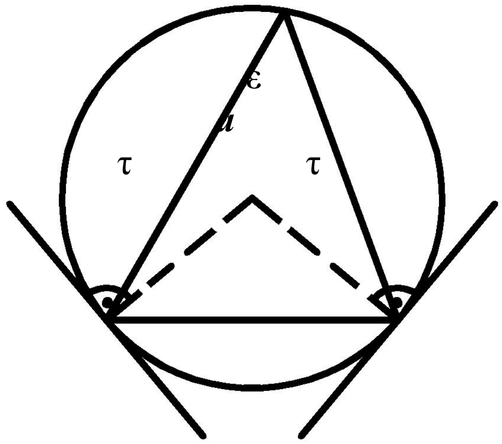
Periferienwinkel



Alle Periferienwinkel auf dem selben Kreisbogen haben den gleichen Winkel

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_2$

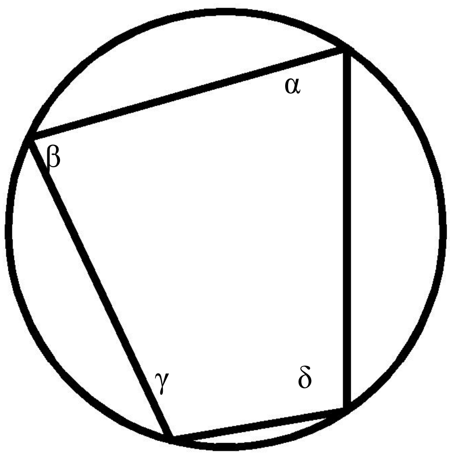
Sehnentangentenwinkel



Die beiden Sehnentangentenwinkel τ sind jeweils jeder so gross wie der dazugehörige Periferiewinkel ε.

Ein üblicher **Beweis** dafür ist, dass wenn wir die Sehne ***a*** gegen den Kreis wandern lassen streben ε und τ gegen 0° und wenn wir ***a*** nach oben verschoben wird streben die drei Winkel alle gegen 180°. Wenn wir ***a*** auf dem Zentrum des Kreises halten bekommen wir einen Thaleskreis mit einem ε von 90° und dem dazugehörigen τ auch mit 90°. Somit kann angenommen werden, dass wenn 3 Punkten stimmen, dass auch alle anderen Punkte stimme.

Sehnenviereck



Ein Viereck, dass einen Umkreis hat, heisst Sehnenviereck und darin gegenüberliegende Winkel sind zusammen jeweils 180°.

$\alpha + \gamma = 180°$

$\beta + \delta = 180°$

3 Nützliche Software

3.1 Maple (Computer Algebra Software)

Mit Maple können diverse Aufgaben erledigt werden, unter anderem Vektoren, Matrizen, Differential und Integral Rechnung unten ein kleines Beispiel: Übungsblatt Bruchrechnung Aufgabe Nummer 38.

1. Eingabe:

```
y:=(2*n-3*x)/(3*a+3)-(5*x+2*n)/(5*b-5)-x*(a+b)/((a+1)*(b-1))
```

2. Automatische Darstellung

$$y := \left(\frac{(2 \cdot n - 3 \cdot x)}{3 \cdot (a + 1)} - \frac{(5 \cdot x + 2 \cdot n)}{5 \cdot (b - 1)} - \frac{x \cdot (a + b)}{(a + 1) \cdot (b - 1)} \right)$$

3. Aufforderung zum Vereinfachen (engl: simplify):

```
simplify(y);
```

4. Die Lösung $-\frac{2}{15} \frac{-5\,n\,b + 8\,n + 15\,x\,b + 15\,x\,a + 3\,n\,a}{(a + 1)\,(b - 1)}$

3.2 Microsoft Visual Studio

Komplette Entwicklungslösung von Microsoft gut, aber relative teuer. Zum entwickeln von C, C++, C# und so weiter, auch beinhaltet es einen handlichen Editor für HTML, XML, CSS, ASP, SQL, ect.

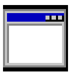
3.3 Sharpdevelop

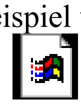
http://www.sharpdevelop.net

Gratis Entwicklungsumgebung für Microsoft (.NET V1.0, V1.1, V2.0) C#, VisualBasic .NET, Mono und Boo. Damit lassen sich relativ einfach kleine Programme erstellen und ausführen.

```
using System;
namespace ggT-kgV
{

      public class ggT-kgV
      {
            public static bool debug=false;


// Moderner euklidscher Algorithmus zur Berechnung des ggT(a,b)
            public static long ggT(long a, long b)
            {
                  a=Math.Abs(a);
                  b=Math.Abs(b);
                  long temp = 0;
                  while(a%b!=0)
                  {
                        temp = b;
                        b = a%b;
                        a = temp;
                        if (debug) Console.WriteLine(a + " " + b + " "
                                                      + temp + " " +);

                  }
                  return b;
            }
// Berechnung des kgV(a,b) mit Hilfe der Formel a*b=kgV(a,b)*ggT(a,b)
            public static long kgV(long a, long b)
            {
                  return (a*b)/ggT(a,b);
            }

      }
}
```

Hier ein kleines Beispiel was man damit so alles anstellen kann:


Visitenkarte.exe

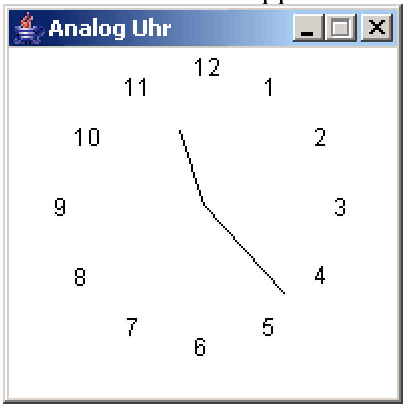

Visitenkarte.zip

(Voraussetzung ist, dass das .NET Framework 2.0 oder höher von Microsoft installiert ist:
http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?familyid=0856EACB-4362-4B0D-8EDD-AAB15C5E04F5&displaylang=de

3.4 J-Builder Foundation

http://www.borland.com/downloads/download_jbuilder.html

Gratis Entwicklungsumgebung für Java mit vielen nützlichen Funktionen zum schnelleren erstellen von Java Applets und Java Applikationen.




Uhr3.zip

3.5 Total Commander

http://www.ghisler.com/deutsch.htm

Handlicher Filemanager für das schnelle „handlen“ von Dateien, suchen von Inhalten, sichern von Verzeichnissen.

3.6 Notepad++

http://notepad-plus.sourceforge.net/de/site.htm

- Syntax Highlighting für:
  C, C++, SQL, VisualBasic, ASP, HTML, PHP, Java und Java-Script
- Unterstützung von Unicode
- Lässt sich in Total Commander einbinden
- Makros

3.7 Gimp

http://www.gimp.org/

Gutes Grafikprogramm, ähnlich Adobe Photoshop, nur gratis (GPL).

3.8 Tiny Hexer

http://www.mirkes.de/de/freeware/tinyhex.php

Gratis Hex-Editor mit vielen Funktionen.

3.9 Pdf Creator

http://www.pdfforge.org/products/pdfcreator/

Gratis Tool zum erstellen von Adobe Acrobat Dateien, das Programm installiert sich als Druckwer, danach kann man einfach auf diesen Drucker drucken von jedem beliebigen Programm und erhält danach eine PDF Datei des Gewünschten Dokumentes.