Formelsammlung Mathematik

Marc Landolt

4. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist meine Formelsammlung aus dem Unterricht an der ABB Technikerschule und verschiedenen Fachhochschulen. Ich Danke Claudine Blum für ein schönes Jahr in meinem Leben. Die Formelsammlung wurde erstellt mit LaTeX

1 Zahlen

1.1 Arabische Ziffern

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$

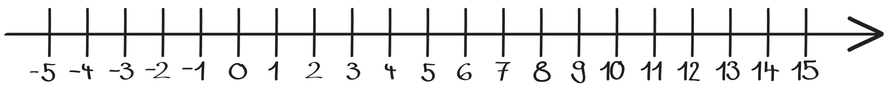
1.2 Kardnalzahlen

Kardinalzahlen sind die natürlichen Zahlen eine mögliche Menge von Grundzahlen

1.3 Ordinalzahlen

Ordinalzahlen sind die natürlichen Zahlen als geordnete Menge mit einem möglichen Abbruch Sie werden für das Konzept der Indexierung verwendet

1.4 Zahlenstrahl



2 Variablen

2.1 Variablen

x, y, z

Platzhalter statische oder variable Rechengrösse

2.2 Formvariablen (Parameter)

a, b, c

Variabel die gemeinsam mit anderen Variablen auftritt. Die Formvariablen müssen beim Addieren gleich sein. werden ungleiche Formvariablen addiert geht die Rechnung nicht auf.

2.3 Winkel

Für Winkel werden die Griechischen Buchstaben verwendet

2.3.1 Griechisches Alphabet

Gross	**klein**	**Name**	**Gross**	**klein**	**Name**
A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

(1)

3 Aussagenlogik

3.1 Axiom

3.2 Streng deduktiv

Aussagen können nur gemacht werden mit Hilfe von vorher bewiesenen Sätzen. Dennoch müssen zu beginn einige Sätze angenommen werden die nicht mit einer Beweiskette bewiesen sind. Diese Sätze nennt man Axiom oder Postulat-

$$a = b \land a = c \Rightarrow b = c \tag{2}$$

$$a + x = c \land b + x = c \Rightarrow a = b \tag{3}$$

$$a = b \land a - x = c \land b - x = d \Rightarrow a = b \tag{4}$$

3.3 Aussage

Eine Aussage ist ein Satz der entweder richtig oder falsch ist.

3.4 Negation

$$Negationeiner Aussage = \neg(Aussage) = \overline{Aussage} \tag{5}$$

3.5 Aussageform

Subjekt und auch Prädikat kann durch eine Variabel ersetzt werden. Sie enthält mindestens eine Variabel

3.6 Subjekt

3.7 Prädikat

4 Oder, Oder-Aussage, Einschliessende Oder

Oder: $\lor$

A (MSB)	**B**	**A $\lor$ B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(6)

4.1 Programmiersprachen

die Meisten Programmiersprachen nutzen ||

4.2 Äquivalenz

Äquivalenzsymbol $\leftrightarrow$
Dies beweist man im Normalfall in dem man zuerst die Implikation $A \rightarrow B$ beweist und danach die Implikation $A \leftarrow B$

4.2.1 Kommutativgesetz der Oder Verknüpfung

$$A \vee B \leftrightarrow B \vee A \tag{7}$$

4.2.2 Assoziativgesetz der Oder Verknüpfung

$$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C) \tag{8}$$

5 Und-Aussage

Und: $\wedge$

A (MSB)	**B**	$\mathbf{A \wedge B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(9)

5.1 Sheffer-Operator

5.2 Peirce-Operator

5.3 Es Falso quodlibet

5.4 Äquivalenz

Äquivalenzsymbol $\leftrightarrow$

5.4.1 Kommutativgesetz der Und Verknüpfung

$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \tag{10}$$

5.4.2 Assoziativgesetz der Oder Verknüpfung

$$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \tag{11}$$

5.5 Programmiersprachen

die Meisten Programmiersprachen nutzen $$

5.6 Gesetz von De Morgan

$$\boxed{\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)} \tag{12}$$

$$\boxed{\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)} \tag{13}$$

dieses scheint auch für 3 Variablen zu gelten

6 Operatoren Priorität

$\neg$
$\wedge$
$\vee$

7 Implikation

Definition: Die Implikation $A \rightarrow B$ ist falsch wenn A wahr ist und B falsch. Das heisst aus A folgt zwangsläufig B aber B kann auch durch andere Umstände wahr sein. //

$$\boxed{A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B} \tag{14}$$

A	**B**	$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\neg\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

(15)

Also wenn z.B. der Vater Mafiosi ist ist es eher unwahrscheinlich, dass es der Sohn nicht ist, es kann aber gut sein, dass der Sohn zur Mafia kommt ohne dass sein Vater dabei ist.
:%s/Mafia/Militär/g
(folglich "Platon – Protagoras"mit der Zentralen Frage: ïst das 'Gut-Sein' lernbar"bzw. Zitat: "daß die Athener derselben Meinung sind, und daß es endlich gar nicht wundersam ist, wenn Söhne guter Väter schlecht und Söhne schlechter Väter gut geraten")

7.1 Verneinung der Implikation

$$\boxed{\neg(A \to B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)}$$

$$\boxed{(A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A))} \tag{16}$$

Beweis:

$$((\neg B) \to (\neg A)) \leftrightarrow (\neg(\neg B) \vee (\neg A)) \tag{17}$$
$$(\neg(\neg B) \vee (\neg A)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (B)) \tag{18}$$
$$((\neg A) \vee (B)) \leftrightarrow A \to B \tag{19}$$
$$A \to B \tag{20}$$

Beispiel:

$$x > 10 \to x^2 > 100 (A \to B) \tag{21}$$
$$x^2 \leqslant 100 \to x \leqslant 10 (\neg B \to \neg A) \tag{22}$$

Die Implikation $(\neg B) \to (\neg A)$ nennt man **Kontraposition zu** $A \to B$ (23)

7.2 Der Indirekte Beweis (durch Kontraposition)

Im Normalfall beweist man einen mathematischen Satz in dem man die Aussage B aus der Aussage ableitet. Man kann aber auch aus der Verneinung von B die Verneinung von A ableiten. Dies ist Mathematisch äquivalent.

7.3 Prädikatenlogik

7.3.1 Quantoren

7.3.2 Existenzaussagen

Exiszenzquantor: $\exists$ oder $\bigvee$ (gesprochen Ës existiert ein...")
Beispiele:
$\exists_x x > 0$ Es existiert ein x dass grösser Null ist.
$\exists_z z^2 = 9$ Es Existiert ein z dessen Quadrat Neun ist.
$\exists_y y^2 < 0$ Es Existiert ein z dessen Quadrat Neun ist.
Zumindest im Körper der Komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$)

7.3.3 Allaussage

Allquantor: $\forall$ oder $\bigwedge$ (gesprochen "Für alle ... gilt ...") Beispiele:
$\forall_x x^4 > 0$ Für alle x gilt $x^4 > 0$. Was für $x = 0$ nicht stimmt.
$\forall_z x^2 > 0$ Für alle z gilt $x^2 = 9$. Was mutmasslich nicht stimmt.
$\forall_y y^2 > -1$ Für alle x gilt $x^4 > 0$

7.4 Verneinung von Existenz und Allaussagen

$$\boxed{\neg(\exists_x A(x)) \leftrightarrow \forall \neg(A(x))} \tag{24}$$

Beispiel:

$$\neg(\exists_x x > 0) \leftrightarrow \forall_x \neg(x > 0) \leftrightarrow \forall_x x \geqslant 0) \tag{25}$$

$$\boxed{\neg(\forall_x A(x)) \leftrightarrow \exists_x \neg(A(x))} \tag{26}$$

Beispiel:

$$\neg(\forall_x x > 0) \leftrightarrow \exists_x \neg(x > 0) \leftrightarrow \exists_x x \leqslant 0) \tag{27}$$

$$\neg(\forall_z z^2 = 9) \leftrightarrow \exists_z \neg(z^2 = 9) \leftrightarrow \exists_z z^2 \neq 9) \tag{28}$$

7.5 Distributivgesetze

$$\boxed{A \wedge B \vee C \leftrightarrow (A \wedge B) \vee C \nleftrightarrow A \wedge (B \vee C)} \tag{29}$$

$$\boxed{A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)} \tag{30}$$

$$\boxed{A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&A \wedge (B \vee C) \\
&\neg(\neg A) \wedge (\neg(\neg B) \vee \neg(\neg C)) \\
&\neg(\neg A) \wedge \neg((\neg B) \wedge (\neg C)) \\
&\neg((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C))) \\
&\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \\
&\neg\neg(\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee \neg C))) \\
&(\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)) \vee (\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg C)) \\
&(A \wedge B) \vee (A \wedge C)
\end{aligned}$$

8 Mengenlehre

Mengen gibt es seit ca. 1880, ihr Erfinder ist Georg Cantor. Eine Menge ist eine Ansammlung von Objekten welche wiederum als ein Objekt betrachtet werden kann
$x \in M$ (man Spricht: x ist Element der Menge M

$$\{\ x | x \text{ ist eine Natürliche Zahl, die keine Primzahl ist } \}$$
$$\text{x für die gilt x ist eine Natürliche Zahl}$$

8.1 Leere Menge

die leere Menge {} ist eine Teilmenge jeder Menge.

8.2 Beweis der Äquivalenz

um zu beweisen dass eine Aussage äquivalent ist beweist man zuerst die eine Richtung $\leftarrow$ und dann die andere Richtung $\rightarrow$

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1 \leftrightarrow M_1 = M_2 \tag{32}$$

8.3 A ist eine Teilmenge von B

Ist x Element von A führt dies dazu dass es automatisch auch Element von B $A \subseteq B \rightarrow A \cap B \subseteq A$ ist und wiederum eine Teilmenge von A bzw. B

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall_x x \in A \rightarrow x \in B \tag{33}$$
$$A \subset B \leftrightarrow A \neq B \wedge \forall_x x \in A \rightarrow x \in B \tag{34}$$

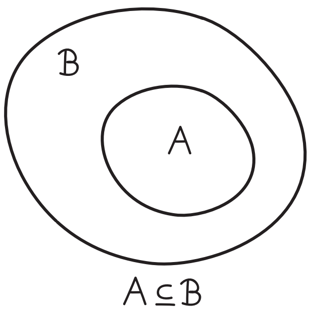


Abbildung 1: Euler-Venn-Diagram der Teilmenge

8.4 Schnittmenge (oder Durchschnittsmenge)

Die Vereinigungsmenge der beiden Mengen A und B ($x \in Aundx \in B$) schreibt man Formal:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \tag{35}$$

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A \tag{36}$$

Kommutativgesetz der Schnittmenge: $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$
Assoziativgesetz der Schnittmenge $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$
Erstes Distributivgesetz: $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
Zweites Distributivgesetz: $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$
Stärkere Bindung für $\cap$: $A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$ würde man das zweite mit der Addition und Multiplikation vergleichen käme das hier falsch raus.

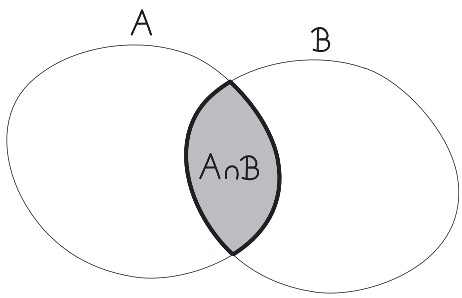


Abbildung 2: Euler-Venn-Diagram der Schnittmenge

Den Beweis erbringt man in dem zeigt dass:
$M_1 \subseteq M_2$
$M_2 \subseteq M_1$
Daraus folgt $M_1 = M_2$

Beweis: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

$$A \subseteq B \rightarrow A \cap B \subseteq A \tag{37}$$

$$A \subseteq B \rightarrow A \subseteq A \cap B \tag{38}$$

$$A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B \tag{39}$$

8.5 Vereinigungsmenge

Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B sei die Menge aller x für die gilt $(x \in A) \vee (x \in B)$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \tag{40}$$

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B \tag{41}$$

Kommutativgesetz der Schnittmenge: $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$
Assoziativgesetz der Schnittmenge $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$
Erstes Distributivgesetz: $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
Zweites Distributivgesetz: $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$
Stärkere Bindung für $\cap$: $A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$

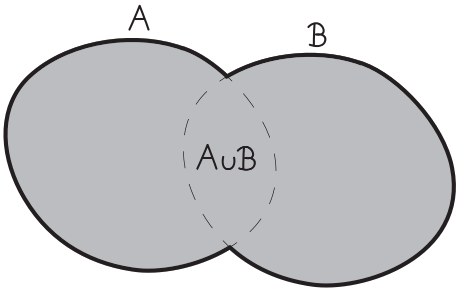


Abbildung 3: Euler-Venn-Diagram der Vereinigungsmenge

8.6 Differenzmenge

Differenzmenge zweier Mengen A und B sei die Menge aller x für die gilt $x \in A \wedge x \notin B$

$$x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \tag{42}$$

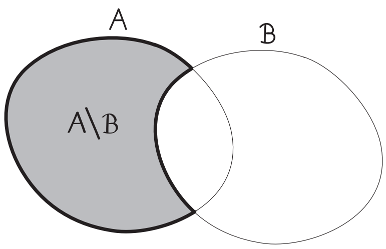


Abbildung 4: Euler-Venn-Diagram der Differenzmenge

8.7 Potenzmenge

Die Potzenzmenge der Menge A $\mathfrak{P}(A)$ ist die Menge aller möglichen Teilmengen die man aus der Grundmenge A konstruieren kann und da die Leere Menge Teilmenge jeder Menge ist gehört diese auch dazu. Somit ist:

$$B \in \mathfrak{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A \tag{43}$$

Beispiel:
Sei $A = \{4, 6, 9\}$
$\mathfrak{P}(A) = \{\{\}, \{4\}, \{6\}, \{9\}, \{4, 6\}, \{4, 9\}, \{6, 9\}, \{4, 6, 9\}\}$

8.8 Russell Paradoxon

Die Menge aller Mengen die sich nicht selber beinhalten.
$S = \{M | M \text{ ist Menge und } M \notin M\}$
$R = \{x \mid x \notin x\}$, then $R \in R \iff R \notin R$

8.9 Kreuzprodukt

Als Kreuzprodukt bezeichnet man die Menge aller **Elementpaare** (x_1, x_2) für die gilt $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$

$$M_1 \times M_2 ... \times M_n := \{(x_1, x_2 ... x_n) | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 ... x_n \in M_n\} \tag{44}$$

8.10 Tupel

8.10.1 Zweitupel

$$M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2\} \tag{45}$$

Hier beginnt der Mensch allenfalls zu Denken, man könne Systeme (Luhmann Theorie) von Elementen (Menschen, Firmen, Mechanische Systeme) Mathematisch darstellen. Beispiel:
Alle Elemente der ersten Menge mal alle Elemente der zweiten Menge:
$M_1 = \{1, 3, 4\}$
$M_2 = \{2, 4\}$
$M_1 \times M_2 = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

8.10.2 Dreitupel

$$M_1 \times M_2 \times M_3 := \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \text{ und } x_3 \in M_3\} \tag{46}$$
$$\tag{47}$$

8.10.3 n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times M_3 ... \times M_n := \tag{48}$$
$$\{(x_1, x_2, x_3 ... x_n) | x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \text{ und } x_3 \in M_3 ... x_n \in M_n\} \tag{49}$$

8.11 Mächtigkeit einer Menge

Die Mächtigkeit einer Menge bedeutet die Anzahl ihrer Mengen, man schreibt:

$$|M| \tag{50}$$

Sei die Menge der Natürlichen Zahlen gegeben $\mathbb{N}$ somit wäre ihre Mächtigkeit unendlich:

$$|\mathbb{N}| = \infty \tag{51}$$

8.11.1 Mächtigkeit eines Kreuzproduktes aus zwei Mengen

Sie entspricht dem Produkt der Mächtigkeiten der einzelnen Mengen. Sind zwei Mengen unendlich so sind diese gleich mächtig wenn es für die beiden Mengen eine Bijektion φ gibt.

$$|M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2| \tag{52}$$
$$\varphi : M \to N \tag{53}$$

8.12 Relation

Eine Relation ist eine **Teilmenge eines Kreuzproduktes** aus den Mengen $M_1, M_2, M_3 ... M_n$, also $R \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3 ... M_n$

Beispiel:
$R_7 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$R_7 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists_{d \in \mathbb{Z}} a - b = d \cdot 7\}$

Falls für $(a, b) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt $(a, b) \in R_7$ man schreibt auch $a \equiv b(\text{mod } 7)$
z.B. gilt für 17:
$17 \equiv 3(\text{mod } 7)$, $17 \equiv 10(\text{mod } 7)$, $17 \equiv 17(\text{mod } 7)$, $17 \equiv 24(\text{mod } 7)$
für $[17]_7 = \{b \in \mathbb{N} | b \equiv 17(\text{mod } 7)$ gilt $[17]_7 = \{17 + d \cdot 7 | d > -3\}$

$$\text{falls für } (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ gilt } (a, b) \in R_q \text{ schreibt man auch } a \equiv b \text{ (mod q)} \tag{54}$$
$$R_q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \tag{55}$$
$$R_q = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists_{d \in \mathbb{Z}} a - b = d \cdot q\} \tag{56}$$

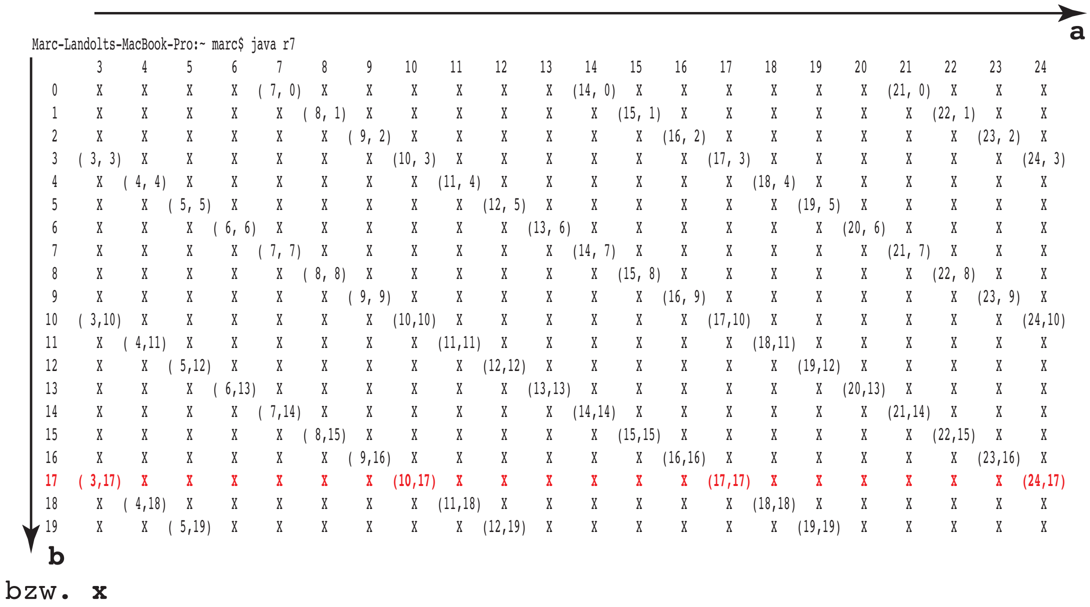
$$\text{Sei } 0 \leq x < q \text{ und sei } [x]_q = \{b \in \mathbb{N} | b \equiv x \text{ (mod q) } \}\text{, dann gilt:} \tag{57}$$
$$[x]_q = \{x + d \cdot q | d \geq 0\} \tag{58}$$

Somit ist $[x]_q$ eine Teilmenge von R_q

9 Abbildungen

Abbildungen sind eine Spezielle Art einer Relation:
Es seinen A und B zwei nicht-leere Mengen. Eine Zuordnungsvorschrift f: $A \to B$ mit $x \to f(x)$ (ausgesprochen: f von A nach B mit x wird abgebildet auf $f(x)$), die jedem Element $x \in A$ genau ein Element aus B zuordnet, heisst *Abbildung* oder *Funktion*. $f(x)$ heisst *Funktionswert* oder das *Bild* von x. X heisst ein Urbild von $f(x)$. Die **Menge** A heisst *Definitionsbereich* von f, B heisst *Bildbereich* von f.

Beispiele:
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2x + 3$



Marc-Landolts-MacBook-Pro:~ marc$ java r7

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	X	X	X	X	(7, 0)	X	X	X	X	X	X	(14, 0)	X	X	X	X	X	X	(21, 0)	X	X	X
1	X	X	X	X	X	(8, 1)	X	X	X	X	X	X	(15, 1)	X	X	X	X	X	X	(22, 1)	X	X
2	X	X	X	X	X	X	(9, 2)	X	X	X	X	X	X	(16, 2)	X	X	X	X	X	X	(23, 2)	X
3	(3, 3)	X	X	X	X	X	X	(10, 3)	X	X	X	X	X	X	(17, 3)	X	X	X	X	X	X	(24, 3)
4	X	(4, 4)	X	X	X	X	X	X	(11, 4)	X	X	X	X	X	X	(18, 4)	X	X	X	X	X	X
5	X	X	(5, 5)	X	X	X	X	X	X	(12, 5)	X	X	X	X	X	X	(19, 5)	X	X	X	X	X
6	X	X	X	(6, 6)	X	X	X	X	X	X	(13, 6)	X	X	X	X	X	X	(20, 6)	X	X	X	X
7	X	X	X	X	(7, 7)	X	X	X	X	X	X	(14, 7)	X	X	X	X	X	X	(21, 7)	X	X	X
8	X	X	X	X	X	(8, 8)	X	X	X	X	X	X	(15, 8)	X	X	X	X	X	X	(22, 8)	X	X
9	X	X	X	X	X	X	(9, 9)	X	X	X	X	X	X	(16, 9)	X	X	X	X	X	X	(23, 9)	X
10	(3,10)	X	X	X	X	X	X	(10,10)	X	X	X	X	X	X	(17,10)	X	X	X	X	X	X	(24,10)
11	X	(4,11)	X	X	X	X	X	X	(11,11)	X	X	X	X	X	X	(18,11)	X	X	X	X	X	X
12	X	X	(5,12)	X	X	X	X	X	X	(12,12)	X	X	X	X	X	X	(19,12)	X	X	X	X	X
13	X	X	X	(6,13)	X	X	X	X	X	X	(13,13)	X	X	X	X	X	X	(20,13)	X	X	X	X
14	X	X	X	X	(7,14)	X	X	X	X	X	X	(14,14)	X	X	X	X	X	X	(21,14)	X	X	X
15	X	X	X	X	X	(8,15)	X	X	X	X	X	X	(15,15)	X	X	X	X	X	X	(22,15)	X	X
16	X	X	X	X	X	X	(9,16)	X	X	X	X	X	X	(16,16)	X	X	X	X	X	X	(23,16)	X
17	(3,17)	X	X	X	X	X	X	(10,17)	X	X	X	X	X	X	(17,17)	X	X	X	X	X	X	(24,17)
18	X	(4,18)	X	X	X	X	X	X	(11,18)	X	X	X	X	X	X	(18,18)	X	X	X	X	X	X
19	X	X	(5,19)	X	X	X	X	X	X	(12,19)	X	X	X	X	X	X	(19,19)	X	X	X	X	X

Abbildung 5: $[17]_7$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 2x + 3$
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^3$

$$F = \{(x, f(x)) | x \in A\} \tag{59}$$
$$F \subseteq A \times B \tag{60}$$

Die erste Komponente bezeichnet die Zweite eindeutig

9.1 Injektiv

Unterschiedliche Elemente des Definitionsbereichs (A) müssen auch unterschiedliche Bilder des Bildbereichs haben)

$$\forall_{x_1,x_2 \in A}\ x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{61}$$

$$\forall_{x_1,x_2 \in A} f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \tag{62}$$

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ nicht injektiv, denn $f(1) = f(-1)$ aber $1 \neq -1$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^3$ ist injektiv

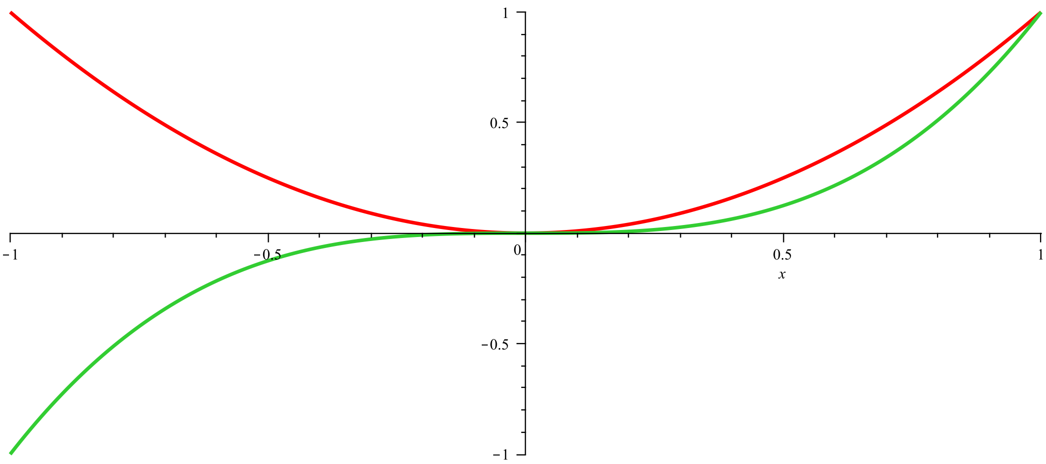


Abbildung 6:

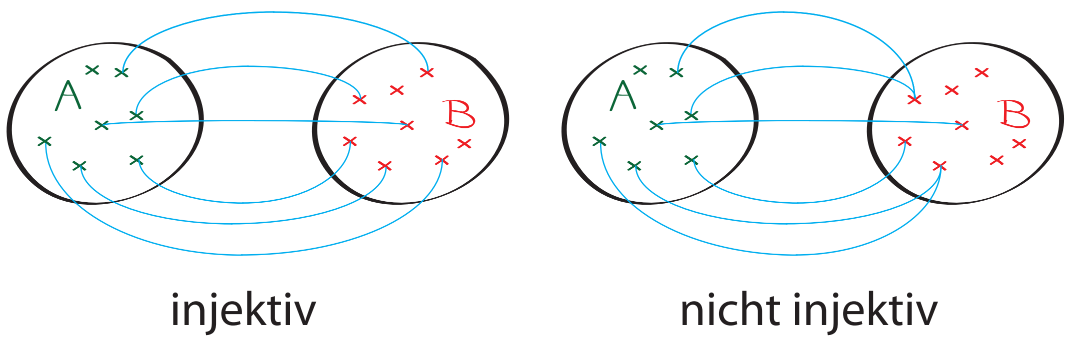


Abbildung 7:

9.2 Surjektiv

Für jedes Element in B wird verwendet und es gibt keine Element in B die nicht durch ein Element des Definitionsbereichs durch die ßpezielle Relationërreicht werden kann.

$$\forall_{y \in B} \ \exists_{x \in A} \ y = f(x) \tag{63}$$

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ nicht surjektiv, für $f(x) = -1$ gibt es keine entsprechendes x
$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \to x^2$ ist surjektiv, jeder Bildpunkt ist erreichbar
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to 40 \cdot sin(x)$ nicht surjektiv, für $f(x) = 50$ gibt es keine entsprechendes x
$f : \mathbb{R} \to [-40, 40], x \to 40 \cdot sin(x)$ ist surjektiv, jeder Bildpunkt ist erreichbar

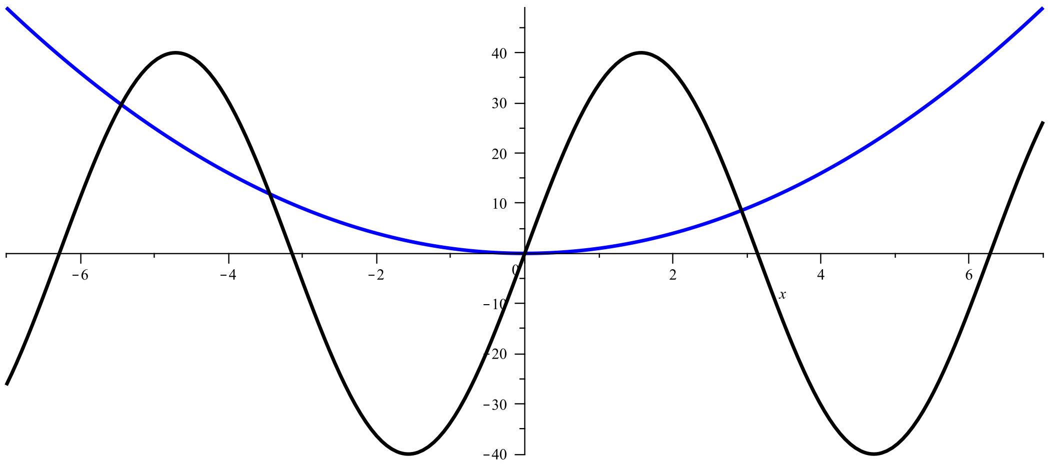


Abbildung 8:

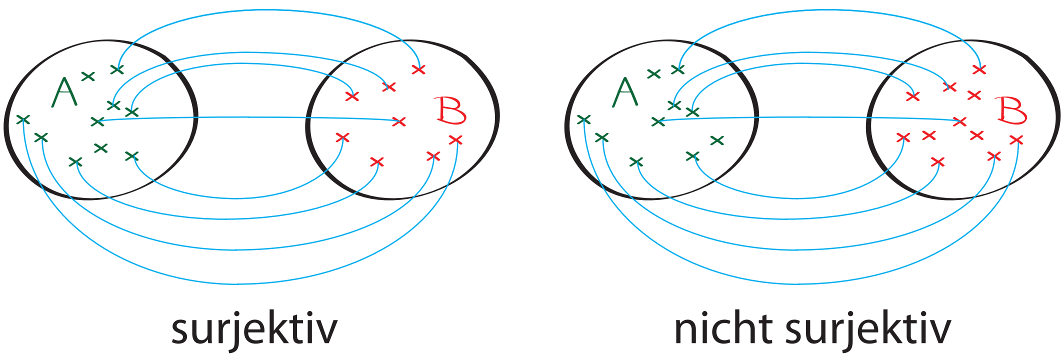


Abbildung 9:

9.3 Bijektiv

Eine Zuordnungsvorschrift welche **Injektiv und Surjektiv** ist nennt man Bijektiv.
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x^2$ nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv
$f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x^2$ injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv
$f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv

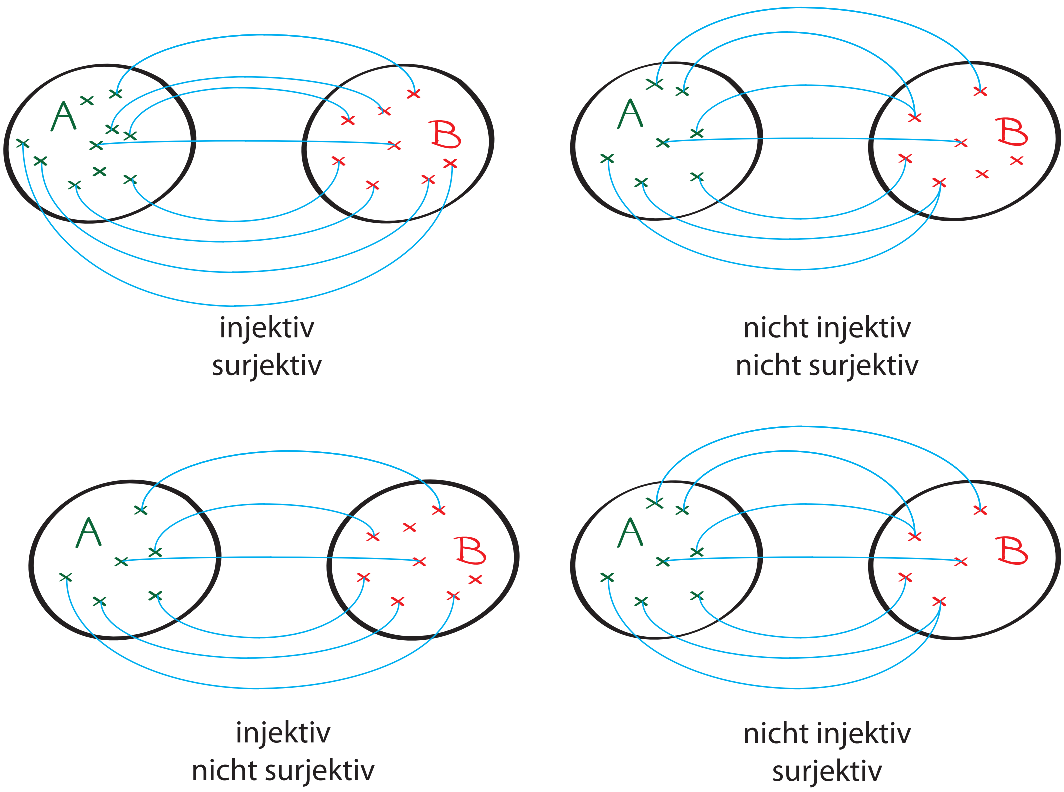


Abbildung 10:

9.4 Zuweisungsoperator $\mapsto$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f : x \mapsto x^2 + 1$
$f(x) = x^2 + 1$

9.5 Die $\mathbb{N}$atürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\} \tag{64}$$
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\} \tag{65}$$

9.6 Axiomsystem von Giuseppe Peano

Ein Axiomsystem ist ein zusammenhängendes System von Axiomen die z.B. eine Menge eindeutig definiert. Und ein Axiom bezeichnet klassisch ein unmittelbar einleuchtendes Prinzip.

$$1. \quad 0 \in \mathbb{N} \tag{66}$$
$$2. \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N} \tag{67}$$
$$3. \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0 \tag{68}$$
$$4. \quad m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n) \text{ (wikipedia)} \tag{69}$$
$$4. \quad m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m \neq n \Rightarrow m' \neq n') \text{ (Mathebuch)} \tag{70}$$
$$5. \quad 0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (n \in X \Rightarrow n' \in X) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X \tag{71}$$

Und weil das kein normaler Mensch versteht hier noch auf Deutsch:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Sind m und n Natürliche Zahlen folgt daraus, dass zahlen mit gleichem Nachfolger identisch sind (wikipedia)
4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger (Mathebuch)
5. Enthält X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X. (Induktionsaxiom)
5. Ist die Aussage wahr für die Zahl 0 und ist sie stets, falls sie für eine Natürliche Zahl n wahr ist, dann auch für den Nachfolger von n wahr, dann ist sie für alle Nachfolger wahr.

Dabei wird $1 := 0'$ definiert und alle nachfolgenden $n' = n + 1$

9.6.1 Neumann Modell der natürlichen Zahlen

$$
\begin{aligned}
0 :=& 0 && (72)\\
1 :=& 0' = \{0\} & = \{0\} \quad & (73)\\
2 :=& 1' = \{0,1\} & = \{0,\{0\}\} \quad & (74)\\
3 :=& 2' = \{0,1,2\} & = \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\} \quad & (75)\\
&\vdots & \vdots \quad &\\
n' :=& \{0,1,2,3,...,n\} & = n \cup \{n\} \quad & (76)
\end{aligned}
$$

Die Menge 3 muss die Menge 2 und 1 auch beinhalten, denn ohne zu wissen was die Menge von 2 Objekten sind kann einen Menge von 3 Objekten nicht existieren.

9.6.2 Axiome

$$
\begin{array}{ll}
\text{Assoziativgesetz der Addition:} & (a+b)+c = a+(b+c)\\
\text{Kommutativgesetz der Addition:} & (a+b) = (b+a)\\
\text{Assoziativgesetz der Multiplikation:} & (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\\
\text{Kommutativgesetz der Multiplikation:} & (a\cdot b) = (b\cdot a)\\
\text{Existenz eines Neutralen Elements:} & \\
\quad \text{0 für die Addition:} & a+0 = 0+a = a\\
\quad \text{1 für die Multiplikation:} & a\cdot 1 = 1\cdot a = a\\
\text{Distributiv Gesetz:} & a\cdot(b+c) = ab+cb
\end{array}
\tag{77}
$$

Folgende Gleichungen sind in $\mathbb{N}$ nicht immer lösbar:

$$a + x = b \tag{78}$$

$$a \cdot x = b \tag{79}$$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
5 + x &= 3\\
5 \cdot x &= 3
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten die inversen Operationen der Addition und Multiplikation sind in $\mathbb{N}$ nicht definiert.

9.7 Multiplikation

Bei der Multiplikation von vier Reihen à fünf Äpfel $4 \cdot 5 = 20$ geht die Information über die Anordnung verloren. Wollen wir das nun mit dem Menschlichen Gehirn wahrnehmen, fällt uns dies nicht ganz leicht da dies wieder die Natur ist. Sehen wir jedoch die vier mal fünf Äpfel vor uns springt es uns geradezu in die Augen, dass man diese ganz einfach unter vier oder fünf Leuten teilen kann. Aber nicht unbedingt, dass man diese auch unter zehn oder Zwanzig Leuten verteilen könnte. (Wahrnehmungspsychologie)

10 Die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{80}$$
$$\tag{81}$$

10.0.1 Beweis

Sind die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gegeben lassen sich daraus die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ konstruieren in dem man die Menge der Zahlen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ also aller Paare der Natürlichen Zahlen.

$$\begin{aligned}
0 :=& 0 & & (82)\\
1 :=& 0' = \{0\} & = \{0\} & \quad (83)\\
2 :=& 1' = \{0, 1\} & = \{0, \{0\}\} & \quad (84)\\
3 :=& 2' = \{0, 1, 2\} & = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\} & \quad (85)\\
&\vdots & \vdots & \\
n' :=& \{0, 1, 2, 3, ..., n\} & = n \cup \{n\} & \quad (86)
\end{aligned}$$

Die Menge 3 muss die Menge 2 und 1 auch beinhalten, denn ohne zu wissen was die Menge von 2 Objekten sind kann einen Menge von 3 Objekten nicht existieren.

10.0.2 Axiome

Assoziativgesetz der Addition:	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Kommutativgesetz der Addition:	$(a + b) = (b + a)$
Assoziativgesetz der Multiplikation:	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Kommutativgesetz der Multiplikation:	$(a \cdot b) = (b \cdot a)$
Existenz eines Neutralen Elements:	
0 für die Addition:	$a + 0 = 0 + a = a$
1 für die Multiplikation:	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Distributiv Gesetz:	$a \cdot (b + c) = ab + cb$

Folgende Gleichungen sind in $\mathbb{N}$ nicht immer lösbar

$$a + x = b \tag{87}$$
$$a \cdot x = b \tag{88}$$

Beispiele:

$$5 + x = 3$$
$$5 \cdot x = 3$$

11 Vollständige Induktion

Sie besteht aus zwei Schritten
1. Verankerung (Induktionsanfang): Zuerst wird die Behauptung für die Zahl 0 gezeigt
2. Induktionsschritt): Mit der ersten Zahl probieren
3. Vollständige Induktion: Unter der Voraussetzung der Induktion, dass für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, wird gezeigt dass die Behauptung auch für n + 1 gilt. Wegen des 5. Peano Axioms gilt dies dann für alle Zahlen von $\mathbb{N}$

Beispiel 1:
$\sum\limits_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2$
$n = 1: \; 1 = 1^2$
$n = 2: \; (2 \cdot 2 - 1) + 1 = 2^2 = 4$
$n = 3: \; (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + 1 = 3^2 = 9$
$n = 4: \; (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + 1 = 4^2 = 16$
$n = 5: \; (2 \cdot 5 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + 1 = 5^2 = 25$

Verankerung: bei $n = 1$
Beweis der Behauptung für $n = 1$:
$\sum\limits_{i=1}^{1}(2 \cdot i - 1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1$ (Stimmt also)

Der Satz sei Wahr für $n \in \mathbb{N}$
$\sum\limits_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2$

Somit müsste er auch für $n + 1$ wahr sein
$\sum\limits_{i=1}^{n+1}(2 \cdot i - 1) = (n + 1)^2$

$$\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1)\Big)}_{n^2 \text{ (nach Vorgabe)}} + \big(2 \cdot (n + 1) - 1\big) =$$

$$\overbrace{n^2} + 2 \cdot (n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = \underbrace{n^2 + 2n + 1}_{\text{Binom}} = (n + 1)^2$$

Beispiel 2:
Behauptung:
Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$
Verankerung bei $n = 1$
$\sum\limits_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) = 1$
Induktionschritt für $n = 2$
$\sum\limits_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = \frac{1}{2} 2 \cdot (2+1) = 3$
Vollständige Induktion für $n' = n + 1$
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2...(n+1) = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} i\big) + (n+1) =$

$$\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)}_{\frac{1}{2}n\cdot(n+1)} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot ((n+1)+1)$$

$\frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n+2)$
$\frac{1}{2} n^2 + 1.5n + 1 = \frac{1}{2} n^2 + 1.5n + 1 \rightarrow$ Stimmt also.

Beispiel 3:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0 + 1 + 8 + 27 + ... + i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Verankerung bei $n = 0$

$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4} = \left(\frac{0(n+1)}{2}\right)^2 = 0$ Stimmt also

Induktionschritt für $n = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 0 + 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

Vollständige Induktion für $n = 1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i^3}_{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2}_{\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}} + \underbrace{(n+1)(n+1)(n+1)}_{n^3+3n^2+3n+1} = \underbrace{\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2}_{\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)^2}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4}}_{\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}} = \underbrace{\frac{(n^2+3n+2)(n^2+3n+2)}{4}}_{\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}}}_{\text{somit Identisch}}$$